

**Définition:** Un type  $A$  est contractile, s'il existe un  $a : A$ , nommé le centre de contraction, tel que pour tous les  $x : A$ ,  $a = x$ .

**Définition:** Une application  $f : A \rightarrow B$  est une équivalence, si pour tous les  $y : B$ , sa fibre,  $\{x : A \mid fx = y\}$ , est contractile. Nous écrivons  $A \simeq B$ , s'il existe une équivalence  $A \rightarrow B$ .

**Lemme:** Pour tout type  $A$ , l'identité,  $1_A := \lambda_{x:A} x : A \rightarrow A$ , est une équivalence.

**Démonstration:** Pour tout  $y : A$ , soit  $\{y\}_A := \{x : A \mid x = y\}$  sa fibre par rapport de  $1_A$  et soit  $\bar{y} := (y, r_A y) : \{y\}_A$ . Comme pour tous les  $y : A$ ,  $(y, r_A y) = y$ , nous pouvons appliquer Id-induction sur  $y$ ,  $x : A$  et  $z : (x = y)$  pour obtenir que

$$(x, z) = y$$

. Donc, pour les  $y : A$ , nous pouvons appliquer  $\Sigma$ -élimination sur  $u : \{y\}_A$  pour obtenir que  $u = y$ , de façon que  $\{y\}_A$  soit contractile. Alors,  $1_A : A \rightarrow A$  est une équivalence.  $\square$

**Corollaire:** Si  $U$  est un univers, alors, pour les  $X, Y : U$ ,

$$(*) X = Y \rightarrow X \simeq Y$$

**Démonstration:** Nous pouvons appliquer le lemme pour obtenir que pour les  $X : U$ ,  $X \simeq X$ . Donc, nous pouvons appliquer Id-induction sur  $X, Y : U$  pour obtenir que (\*).  $\square$

**Définition:** Un univers  $U$  est univalent, si pour les  $X, Y : U$ , l'application  $E_{X,Y} : X = Y \rightarrow X \simeq Y$  dans (\*) est une équivalence.